ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φεβρουάριος 2020

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

Θέμα 1 : α) Αν $x, y, z \in R^n$, είναι ορθογώνια μεταξύ των με $\|x\|_2 = \|y\|_2 = \|z\|_2$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $q = x + \alpha y$ και $w = x - \frac{1}{\alpha}y + \beta z$ είναι ορθογώνια μεταξύ των, για κάθε $\alpha \in R\backslash\{0\}$ και $\beta \in R$.
β) Αν $A \in R^{n,n}$ είναι ορθογώνιος πίνακας, να αποδείξετε ότι $\kappa_2(A) = 1$, όπου $\kappa_2(A)$ είναι ο δείκτης κατάστασης του A που αντιστοιχεί στη $\|\cdot\|_2$.

Θέμα 2 : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ των οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel, βέλτιστη SOR και η βέλτιστη μέθοδος παρεκβολής (extrapolated) της Gauss-Seidel.

Θέμα 3 : α) Να αποδείξετε ότι δυο διαδοχικά διανύσματα υπόλοιπο $r^{(k)}$ και $r^{(k+1)}$ της μεθόδου απότομης καθόδου, είναι ορθογώνια.
β) Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$.
(Να διατηρείτε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς.)

Θέμα 4 : Να λυθεί το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $\min_x \|b - Ax\|_2$, με

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

και $b = (0 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 10)^T$, με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή $\min_x \|b - Ax\|_2$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

Θέμα 5 : Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Να γίνουν δυο επαναλήψεις για την προσέγγιση της μικρότερης απόλυτα ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίστροφων δυνάμεων με τον αλγόριθμο της $\|\cdot\|_\infty$ και με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (1 \;\; 0 \;\; 0)^T$. Η λύση των συστημάτων να γίνει με την παραγοντοποίηση Cholesky.
(Να γίνουν ακριβείς πράξεις με κλάσματα στους υπολογισμούς.)